سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

ماز

دورهٔ جمع‌بندی دوپینگ

جمعه

۱۴۰۴/۰۱/۱۵

بانک سؤالات کنکور:

جامع مشتق و کاربرد مشتق:

(فصل ۴ و ۵ دوازدهم)

دفترچه پاسخ

دوپینگ ماز

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

حسابان

درس	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	زمان پیشنهادی
حسابان	۳۸	۱	۳۸	۶۷ دقیقه

هفته اول	هفته دوم	هفته سوم	هفته چهارم	هفته پنجم	هفته ششم
مباحث پایه	جامع تابع+توابع نمایی و لگاریتمی	جامع مثلثات	جامع حد و پیوستگی	جامع مشتق و کاربرد مشتق	-	الگو و دنباله، توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

۵۵ روز جمع‌بندی تا کنکور اردیبهشت

دفترچهٔ مکمل دوپینگ: این دفترچه روز بعد از آزمون دوپینگ هر درس در اختیار شما قرار می‌گیرد و شامل بانک سؤالات کنکورهای سراسری ۹۸ تا ۱۴۰۳ در همان مبحث است تا ضمن مرور مجدد، سیر تست‌های کنکور در هر مبحث را به دقت مورد بررسی قرار دهید.

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هرگونه استفادهٔ غیرقانونی از دفترچه سؤالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.

دوپینگ ماز
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

سؤالات کنکور: فصل ۴ دوازدهم

۱- اگر $g(x)=x+\sqrt{x}$ و $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\frac{۴}{۳}$ باشد، $(fog)'(۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۴) (کنکور داخل ۹۸)

نکته:

ـ اگر f و g توابعی مشتق‌پذیر باشند:

$$(fog)'(x)=g'(x)f'\big(g(x)\big)$$

ـ تعریف مشتق تابع f در $x=a$:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

ابتدا با توجه به تعریف مشتق تابع مرکب داریم:

$$(fog)'(x)=g'(x)f'\big(g(x)\big)\xrightarrow{x=۱}(fog)'(۱)=g'(۱)f'\big(g(۱)\big)\ (*)$$

حال $g(۱)$ و $g'(۱)$ را می‌یابیم:

$$g(x)=x+\sqrt{x}\Rightarrow\begin{cases}g'(x)=۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\xrightarrow{x=۱}g'(۱)=۱+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}\\ g(۱)=۱+\sqrt{۱}=۲\end{cases}$$

می‌دانیم که $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\frac{۴}{۳}$، همان تعریف مشتق تابع f در $x=۲$ است. پس: $f'(۲)=\frac{۴}{۳}$

$$\xrightarrow{(*)}g'(۱)f'\big(g(۱)\big)=\frac{۳}{۲}f'(۲)=\frac{۳}{۲}\times\frac{۴}{۳}=۲$$

گروه آموزشی ماز

۲- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}|x^۲-۲x| & ;\ x<۲\\ \frac{۱}{۲}x^۲+ax+b & ;\ x\geq ۲\end{cases}$، در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر است. $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۴) (کنکور داخل ۹۸)

نکته:

برای اینکه تابع چندضابطه‌ای $f(x)=\begin{cases}g(x) & x\geq a\\ h(x) & x<a\end{cases}$ در نقطه مرزی $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، باید شروط زیر برقرار باشد:

۱) تابع f در $x=a$ پیوسته باشد:

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)=f(a)$$

۲) مشتق چپ و راست تابع f در $x=a$ موجود (متناهی) و با هم برابر باشند:

$$f'_+(a)=f'_-(a)$$

چون تابع f در $x=۲$ مشتق‌پذیر است، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که این تابع در $x=۲$ پیوسته است. از طرفی در همسایگی چپ $x=۲$، عبارت داخل قدرمطلق منفی است، لذا داریم: $|x^۲-۲x|=-x^۲+۲x$

$$f(x)=\begin{cases}x^۲-۲x & x<۰\\ -x^۲+۲x & ۰<x<۲\\ \frac{۱}{۲}x^۲+ax+b & x\geq ۲\end{cases}$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

دوپینگ ماز
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

شرط پیوستگی:

$$f(2)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{2}x^2+ax+b\right)=2+2a+b$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(-x^2+2x)=-4+4=0$$

$$\Rightarrow 2a+b+2=0\Rightarrow 2a+b=-2$$

شرط مشتق‌پذیری:

$$f'(x)=\begin{cases}2x-2 & x<0\\ -2x+2 & 0<x<2\\ x+a & x>2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'_-(2)=-4+2=-2\\ f'_+(2)=2+a\end{cases}\Rightarrow f'_+(2)=f'_-(2)\Rightarrow 2+a=-2\Rightarrow a=-4$$

می‌دانیم که $2a+b=-2$ است پس با داشتن $a=-4$ داریم:

$$2a+b=-2\xrightarrow{a=-4}-8+b=-2\ \rightarrow\ b=6$$

$$\Rightarrow a+b=-4+6=2$$

گروه آموزشی ماز

۳- خط به معادلهٔ $y=3x-5$ در نقطهٔ $x=2$ بر نمودار تابع $y=g(x)$ مماس است. اگر $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{2x-2}=\frac{2}{3}$ باشد، $(fog)'(2)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۴) (کنکور خارج ۹۸)

تعریف مشتق تابع f در $x=a$:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

مشتق ترکیب توابع

اگر f و g توابعی مشتق‌پذیر باشند:

$$(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{2x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{2(x-1)}=\frac{1}{2}f'(1)=\frac{2}{3}\Rightarrow f'(1)=\frac{4}{3}$$

چون خط $y=3x-5$ در نقطه $x=2$ بر نمودار تابع $y=g(x)$ مماس است، پس:

$$\begin{cases}y(2)=g(2)=3(2)-5=1\\ y'(2)=g'(2)=3\end{cases}$$

بنابراین مشتق خواسته شده برابر است با:

$$(fog)'(2)=g'(2).f'(g(2))=3\times f'(1)=3\times\frac{4}{3}=4$$

گروه آموزشی ماز

۴- اگر f یک تابع مشتق‌پذیر، $g(x)=f\left(\sqrt{1+\tan^2 x}\right)$ و $g'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد، مقدار $f'(2)$، کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط / ترکیبی ـ ۱۲۰۴) (کنکور داخل ۹۹)

مشتق ترکیب توابع

اگر f و g توابعی مشتق‌پذیر باشند، داریم:

$$y=f(g(x))\Rightarrow y'=g'(x)f'(g(x))$$

مشتق تقسیم دو تابع

$$y=\frac{f(x)}{g(x)}\Rightarrow y'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds
دوپینگ ماز

مشتق توابع مثلثاتی

$$\begin{cases} y=\cos x \to y'=-\sin x \\ y=\cos u \to y'=-u'\sin u \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\sin x \to y'=\cos x \\ y=\sin u \to y'=u'\cos u \end{cases}$$

ابتدا تابع درونی را در تابع g به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{1+\tan^2 x}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}=\frac{1}{|\cos x|}$$

و چون مشتق تابع g را در $x=\frac{\pi}{3}$ می‌خواهیم، بنابراین $|\cos x|=\cos x$ است. بنابراین:

$$g(x)=f\left(\frac{1}{\cos x}\right)\Rightarrow g'(x)=\frac{-(-\sin x)}{\cos^2 x}f'\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$g'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}\times f'\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}\right)=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\times f'(2)=2\sqrt{3}f'(2)$$

می‌دانیم که $g'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ است. پس:

$$2\sqrt{3}f'(2)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow f'(2)=\frac{1}{4}$$

گروه آموزشی ماز

۵- آهنگ متوسط تغییر تابع $y=\sqrt{21-x^2+4x}$ در بازهٔ $[5,6]$، برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع، با کدام مقدار x است؟

۱) $4+\sqrt{2}$ ۲) $3+2\sqrt{2}$ ۳) $2+\frac{3}{2}\sqrt{2}$ ۴) $2+\frac{5}{2}\sqrt{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۴) (کنکور داخل ۹۹)

ـ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[a,b]$ برابر است با: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ـ آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در نقطه‌ای به طول $x=a$ برابر است با: $f'(a)$

ابتدا آهنگ متوسط تغییر تابع را در بازه $[5,6]$ پیدا می‌کنیم:

$$\frac{f(6)-f(5)}{6-5}=\sqrt{21-36+24}-\sqrt{21-25+20}=\sqrt{9}-\sqrt{16}=3-4=-1$$

سپس آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{-2x+4}{2\sqrt{21-x^2+4x}}=\frac{-x+2}{\sqrt{21-x^2+4x}}$$

و چون می‌دانیم که آهنگ تغییر متوسط تابع با آهنگ تغییر لحظه‌ای آن برابر است. پس:

$$\frac{-x+2}{\sqrt{21-x^2+4x}}=-1\Rightarrow\sqrt{21-x^2+4x}=x-2\Rightarrow 21-x^2+4x=(x-2)^2$$

$$\Rightarrow -x^2+4x+21=x^2-4x+4\Rightarrow 2x^2-8x-17=0$$

$$\xrightarrow{\Delta=200}\begin{cases} x=\frac{8+\sqrt{200}}{4}=\frac{8+10\sqrt{2}}{4}=\frac{4+5\sqrt{2}}{2}=2+\frac{5}{2}\sqrt{2} \\ x=\frac{8-\sqrt{200}}{4}=\frac{8-10\sqrt{2}}{4}=\frac{4-5\sqrt{2}}{2}=2-\frac{5}{2}\sqrt{2} \end{cases}$$

فقط $2+\frac{5}{2}\sqrt{2}$ در گزینه‌ها قرار دارد.

گروه آموزشی ماز

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

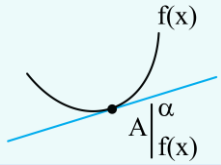
دوپینگ ماز
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۶- خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=\frac{5x-4}{\sqrt{x}}$ در نقطهٔ $x=4$ واقع بر آن، محور yها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

۱) ۴- ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۴) (کنکور داخل ۹۹)

خط مماس



شیب خط مماس = $m=f'(\alpha)$

معادلهٔ خط مماس = $y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$

ابتدا مختصات نقطه تماس را پیدا می‌کنیم:

$$f(4)=\frac{(5\times4)-4}{\sqrt{4}}=\frac{20-4}{2}=\frac{16}{2}=8 \Rightarrow \text{نقطه تماس}=A(4,8)$$

حال شیب خط مماس بر نمودار تابع f را در نقطه $x=4$ پیدا می‌کنیم که همان $f'(4)$ است.

$$f(x)=\frac{5x-4}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x)=\frac{5\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\times(5x-4)}{x} \xrightarrow{x=4} f'(4)=\frac{5\sqrt{4}-\frac{1}{2\sqrt{4}}\times(20-4)}{4}$$

$$\Rightarrow f'(4)=\frac{10-4}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=m$$

حال معادله خط مماس را تشکیل می‌دهیم:

$$y-8=\frac{3}{2}(x-4) \xrightarrow[\text{برخورد با محور y}]{x=0} y-8=-6 \Rightarrow y=2$$

گروه آموزشی ماز

۷- اگر f یک تابع مشتق‌پذیر، $g(x)=f\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)$ و $g'(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{3}$ باشند، مقدار $f'(\frac{1}{3})$، کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{3}{4}$ ۳) $-\frac{4}{3}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۴) (کنکور خارج ۹۹)

نکته ۱:

اگر f و g توابعی مشتق‌پذیر باشند، داریم:

$$y=f(g(x)) \Rightarrow y'=g'(x)f'(g(x))$$

نکته ۲:

$$y=\frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

نکته ۳:

$$\begin{cases} y=\cos x \to y'=-\sin x \\ y=\cos u \to y'=-u'\sin u \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\sin x \to y'=\cos x \\ y=\sin u \to y'=u'\cos u \end{cases}$$

می‌دانیم که مشتق تابع مرکب $f(g(x))$ به صورت $g'(x)f'(g(x))$ تعریف می‌شود. بنابراین:

$$g(x)=f(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}) \Rightarrow g'(x)=(\frac{1-\sin x}{1+\sin x})'f'(\frac{1-\sin x}{1+\sin x})$$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{-\cos x(1+\sin x)-(\cos x)(1-\sin x)}{(1+\sin x)^2}\times f'(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}) \Rightarrow g'(x)=\frac{-2\cos x}{(1+\sin x)^2}\times f'(\frac{1-\sin x}{1+\sin x})$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

دوپینگ ماز
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

حال $x=\frac{\pi}{6}$ را جایگذاری می‌کنیم و می‌دانیم که $g'(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{3}$ است، پس:

$$g'(\frac{\pi}{6})=\frac{-2\cos\frac{\pi}{6}}{(1+\sin\frac{\pi}{6})^2}\times f'(\frac{1-\sin\frac{\pi}{6}}{1+\sin\frac{\pi}{6}})=\frac{\frac{-2\sqrt{3}}{2}}{(1+\frac{1}{2})^2}\times f'(\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}})$$

$$\Rightarrow g'(\frac{\pi}{6})=\frac{-\sqrt{3}}{\frac{9}{4}}\times f'(\frac{1}{3})\Rightarrow g'(\frac{\pi}{6})=\frac{-4\sqrt{3}}{9}\times f'(\frac{1}{3})=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow f'(\frac{1}{3})=\frac{9\sqrt{3}}{-3\times 4\sqrt{3}}=-\frac{3}{4}$$

گروه آموزشی ماز

۸- فرض کنید نمودارهای دو تابع $y=x\sqrt{x}$ و $y=x^2+ax+b$ در یک نقطهٔ مشترک، بر یک خط مماس باشند. اگر طول نقطهٔ مشترک ۴ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۴) (کنکور خارج ۹۹)

اگر منحنی توابع f و g در نقطه‌ای به طول $x=a$ بر هم مماس باشند، داریم:

۱) هر دو تابع در $x=a$ مقدار برابری دارند. $f(a)=g(a)$

۲) هر دو تابع در $x=a$ مماس مشترک دارند. بنابراین شیب خط مماس بر نمودار هر دو تابع در این نقطه با هم برابر است، به عبارتی: $f'(a)=g'(a)$

چون هر دو تابع در $x=4$ بر هم مماس‌اند. بنابراین مطابق درسنامه باید $y_1=y_2$ باشد، لذا:

$$\begin{cases}y_1=x^2+ax+b\\ y_2=x\sqrt{x}\end{cases}\xrightarrow[y_1=y_2]{x=4}16+4a+b=8\Rightarrow 4a+b=-8\quad (*)$$

از طرفی باید در $x=4$، $y'_1=y'_2$ باشد:

$$\begin{cases}y'_1=2x+a\\ y'_2=\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}\end{cases}\xrightarrow[y'_1=y'_2]{x=4}8+a=2+\frac{4}{4}\Rightarrow a=-5$$

حالا با داشتن $a=-5$ و مطابق رابطه $(*)$ داریم:

$$4a+b=-8\xrightarrow{a=-5}-20+b=-8\Rightarrow b=-8+20\Rightarrow b=12$$

گروه آموزشی ماز

۹- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+6x} & ;0\le x<4\\ [\frac{x}{4}](x^2-9x) & ;4\le x<8\end{cases}$، مقدار $f'(2)-f'(5)$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۴) (کنکور خارج ۹۹)

$$y=\sqrt[m]{u^n}\rightarrow y'=\frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$$

چون $x=2$ در فاصله $0\le x<4$ قرار دارد، بنابراین برای محاسبه $f'(2)$ از ضابطه بالا استفاده می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x^2+6x}\Rightarrow f'(x)=\frac{2x+6}{2\sqrt{x^2+6x}}\xrightarrow{x=2}f'(2)=\frac{10}{2\sqrt{4+12}}=\frac{5}{\sqrt{16}}=\frac{5}{4}$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

و چون $x=۵$ در فاصله $۴ \le x < ۸$ قرار دارد پس برای محاسبه $f'(۵)$ از ضابطه پایین کمک می‌گیریم، البته با توجه به حضور جزء صحیح در این ضابطه ابتدا تکلیف آن را مشخص کرده و سپس مشتق می‌گیریم:

$$\left[\frac{x}{۴}\right] \xrightarrow{x=۵} \left[\frac{۵}{۴}\right]=۱$$

$$f(x)=\left[\frac{x}{۴}\right](x^۲-۹x) \Rightarrow f(x)=x^۲-۹x$$

$$\Rightarrow f'(x)=۲x-۹ \xrightarrow{x=۵} f'(۵)=۱۰-۹=۱$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با:

$$f'(۲)-f'(۵)=\frac{۵}{۴}-۱=\frac{۱}{۴}$$

گروه آموزشی ماز

۱۰- فرض کنید $f(x)=\begin{cases}-۱ & x<-۱\\ x & -۱\le x\le ۱\\ ۱ & x>۱\end{cases}$ و $g(x)=۱-x^۲$. تعداد عناصر مجموعه نقاطی که gof یا fog در آن‌ها مشتق‌پذیر نیست، کدام است؟

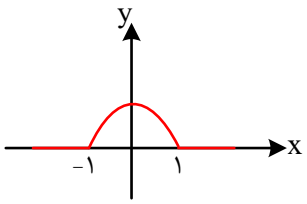
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۳ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۴) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

ابتدا ضابطه تابع gof را تشکیل می‌دهیم:

$$gof(x)=g(f(x))=\begin{cases}۱-(-۱)^۲ & x<-۱\\ ۱-x^۲ & -۱\le x\le ۱\\ ۱-(۱)^۲ & x>۱\end{cases}=\begin{cases}۰ & x<-۱\\ ۱-x^۲ & -۱\le x\le ۱\\ ۰ & x>۱\end{cases}$$

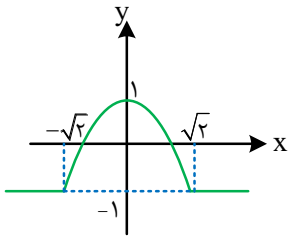
حال نمودار آن را رسم می‌کنیم:



همان‌طور که از نمودار تابع gof مشخص است این تابع در نقاط به طول‌های $x=۱$ و $x=-۱$ مشتق‌ناپذیر است. (نقاط گوشه‌ای) حال ضابطه تابع fog را نیز تشکیل داده و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$fog(x)=f(g(x))=\begin{cases}-۱ & ۱-x^۲<-۱\\ ۱-x^۲ & -۱\le ۱-x^۲\le ۱\\ ۱ & ۱-x^۲>۱\end{cases}=\begin{cases}-۱ & x^۲>۲\\ ۱-x^۲ & ۰\le x^۲\le ۲\\ ۱ & x^۲<۰ \rightarrow \text{ناممکن}\end{cases}$$

$$\Rightarrow fog(x)=\begin{cases}-۱ & x>\sqrt{۲}\\ ۱-x^۲ & -\sqrt{۲}\le x\le \sqrt{۲}\\ -۱ & x<-\sqrt{۲}\end{cases}$$



از نمودار تابع fog می‌توان فهمید که این تابع در نقاط به طول‌های $x=\sqrt{۲}$ و $x=-\sqrt{۲}$ مشتق‌ناپذیر است. (نقاط گوشه‌ای). پس توابع fog و gof در مجموع در ۴ نقطه مشتق‌ناپذیرند.

گروه آموزشی ماز

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

دوپینگ ماز
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۱- خطوط مماس بر منحنی تابع $f(x)=|\sin(2x)|+1$ را در نقطه‌ای به طول $x=0$ رسم می‌کنیم. اگر A و B به‌ترتیب نقاط برخورد خطوط مماس با نیمساز ربع دوم و چهارم باشند، طول پاره‌خط AB ، کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ۳) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ۴) $2\sqrt{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۴) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

ابتدا باید معادله خطوط مماس بر منحنی تابع را در نقطه‌ای به طول $x=0$ ، تشکیل بدهیم. برای این کار نیاز داریم که شیب خطوط مماس بر منحنی تابع را در $x=0$ داشته باشیم، پس:

$$f(x)=|\sin 2x|+1 \Rightarrow \begin{cases} x\geq 0 : f(x)=\sin 2x+1 \\ x<0 : f(x)=-\sin 2x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_+(x)=2\cos 2x \xrightarrow{x=0} f'_+(0)=2\cos(0)=2 \\ f'_-(x)=-2\cos 2x \xrightarrow{x=0} f'_-(0)=-2\cos(0)=-2 \end{cases}$$

از طرفی می‌دانیم که این خطوط مماس در نقطه‌ای به مختصات $(0,f(0))$ بر تابع f مماس هستند. پس مختصات نقطه تماس به‌صورت $(0,1)$ است. بنابراین:

$$\begin{cases} x=0 \text{ معادله نیم‌مماس راست در} & : y-y_0=f'_+(0)(x-x_0)\Rightarrow y-1=2(x-0)\Rightarrow y=2x+1 \\ x=0 \text{ معادله نیم‌مماس چپ در} & : y-y_0=f'_-(0)(x-x_0)\Rightarrow y-1=-2(x-0)\Rightarrow y=-2x+1 \end{cases}$$

حال برای پیدا کردن نقاط برخورد نیم مماس‌ها با نیمساز ربع دوم و چهارم، این معادله‌ها را با خط $y=-x$ قطع می‌دهیم:

$$\begin{cases} y=2x+1 \\ y=-x \end{cases} \Rightarrow 2x+1=-x \Rightarrow 3x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{3} \xrightarrow{y=-x} y=\frac{1}{3} \Rightarrow A(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$$

$$\begin{cases} y=-2x+1 \\ y=-x \end{cases} \Rightarrow -2x+1=-x \Rightarrow x=1 \xrightarrow{y=-x} B(1,-1)$$

حال طول پاره‌خط AB برابر است با:

$$\begin{cases} A=(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}) \\ B=(1,-1) \end{cases} \Rightarrow AB=\sqrt{(1-(-\frac{1}{3}))^2+(-1-\frac{1}{3})^2}=\sqrt{(\frac{4}{3})^2+(-\frac{4}{3})^2}=\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{16}{9}}=\frac{4}{3}\sqrt{2}$$

گروه آموزشی ماز

۱۲- کدام عبارت، برای تابع $f(x)=2\sqrt{x}-\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2-1}}$ ، درست است؟

۱) تابع f در بازهٔ $(0,1)\cup(1,\infty)$ صعودی است.
۲) تابع f در بازه‌های $(1,\infty)$ و $(0,1)$ صعودی است.
۳) تابع f در بازهٔ $(1,\infty)$ صعودی و در بازهٔ $(0,1)$ نزولی است.
۴) تابع f در بازهٔ $(1,\infty)$ نزولی و در بازهٔ $(0,1)$ صعودی است.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۴) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

ابتدا دامنه تعریف تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=2\sqrt{x}-\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2-1}}$$

$$\begin{cases} x\geq 0 : & \text{زیر رادیکال فرجه زوج نامنفی} \\ 2\sqrt[3]{x^2-1}\neq 0\Rightarrow x^2-1\neq 0\Rightarrow x\neq\pm 1 : & \text{مخرج کسر غیرصفر} \end{cases} \Rightarrow D_f:[0,1)\cup(1,+\infty)$$

حال یکنوایی تابع f را به صورت زیر تحلیل می‌کنیم (دقت شود که تحلیل زیر برای هر یک از بازه‌های $[0,1)$ و $(1,+\infty)$ به صورت جداگانه گفته شده و برای اجتماع هر دو بازه نیست.)

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

دوپینگ ماز
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

تابع $y=۲\sqrt{x}$، تابعی اکیداً صعودی است و تابع $y=\frac{-۳}{۲\sqrt[۳]{x^۲-۱}}$ نیز اکیداً صعودی است! چرا؟ تابع $y=\sqrt[۳]{x^۲-۱}$ در هریک از قسمت‌های D_f تابعی اکیداً صعودی است و معکوس آن یعنی $y=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲-۱}}$ تابعی اکیداً نزولی است.

حال اگر این تابع را در $-\frac{۳}{۲}$ ضرب کنیم این منحنی نسبت به محور xها قرینه شده و تابعی اکیداً صعودی خواهد بود. پس تابع $y=\frac{-۳}{۲\sqrt[۳]{x^۲-۱}}$، تابعی اکیداً صعودی است. از طرفی می‌دانیم که جمع دو تابع اکیداً صعودی، اکیداً صعودی است. پس تابع $f(x)=۲\sqrt{x}-\frac{۳}{۲\sqrt[۳]{x^۲-۱}}$، در هر یک از بازه‌های $[۰,۱)$ و $(۱,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

حال برای بررسی دقیق‌تر، حد چپ و راست تابع f را در حوالی $x=۱$ به دست آورده و رفتار تابع را در این حوالی تشخیص می‌دهیم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}(۲\sqrt{x}-\frac{۳}{۲\sqrt[۳]{x^۲-۱}})=۲-\frac{۳}{۲\sqrt[۳]{۰^+}}=۲-\frac{۳}{۰^+}=۲-\infty=-\infty\\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}(۲\sqrt{x}-\frac{۳}{۲\sqrt[۳]{x^۲-۱}})=۲-\frac{۳}{۲\sqrt[۳]{۰^-}}=۲-\frac{۳}{۰^-}=۲-(-\infty)=+\infty\end{cases}$$

بنابراین رفتار تابع در حوالی $x=۱$ به صورت $x=۱$ است پس تابع f در کل دامنه خود $([۰,۱)\cup(۱,+\infty))$ غیر یکنوا است اما در فاصله $[۰,۱)$ و $(۱,+\infty)$ به صورت مجزا، اکیداً صعودی است.

گروه آموزشی ماز

۱۳- فرض کنید $f(x)=\sin^n(x^۲)$ و $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{f(x)f'(x)}{(۱-\cos(x))^m}=۳۲\sqrt{۲}$، مقدار $۲m+n$، کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۱

پاسخ: گزینهٔ ۳ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۴) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

چون کمان نسبت‌های سینوس و کسینوس به سمت صفر میل می‌کنند، بنابراین می‌توانیم از هم‌ارزی مثلثاتی در صفر کمک بگیریم:

$$\lim_{x\to ۰}\sin^n(x^۲)\simeq(x^۲)^n=x^{۲n}\Rightarrow f'(x)=۲nx^{۲n-۱}$$

می‌دانیم $\lim\limits_{u\to ۰}\sin^n u\sim u^n$.

از طرفی هم می‌دانیم $\lim\limits_{u\to ۰}(۱-\cos u)\sim\frac{u^۲}{۲}$ است. پس:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)\times f'(x)}{(۱-\cos x)^m}=\lim_{x\to ۰}\frac{x^{۲n}\times(۲nx^{۲n-۱})}{(\frac{x^۲}{۲})^m}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲n(x^{۴n-۱})}{\frac{x^{۲m}}{۲^m}}=\lim_{x\to ۰}(۲n\times ۲^m)\frac{x^{۴n-۱}}{x^{۲m}}=۳۲\sqrt{۲}$$

حد فوق یک حد مبهم $\frac{۰}{۰}$ است که حاصل آن برابر یک عدد حقیقی غیرصفر است. بنابراین باید درجهٔ عامل صفرشوندهٔ صورت با درجهٔ عامل صفرشوندهٔ مخرج برابر باشد. پس:

$$۴n-۱=۲m\Rightarrow\lim_{x\to ۰}(۲n\times ۲^m)\frac{x^{۴n-۱}}{x^{۲m}}=۲n\times ۲^m=۳۲\sqrt{۲}\Rightarrow\begin{cases}۴n-۱=۲m\\ ۲n\times ۲^m=۳۲\sqrt{۲}\end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲n\times ۲^m=۳۲\sqrt{۲}\Rightarrow ۲n\times ۲^{\frac{۴n-۱}{۲}}=۳۲\sqrt{۲}\Rightarrow ۲n\times(۲^{۲n}\times\frac{۱}{\sqrt{۲}})=۳۲\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow n\times ۴^n=۳۲\Rightarrow n=۲$$

$$\Rightarrow ۴n-۱=۲m\xrightarrow{n=۲}m=\frac{۷}{۲}\qquad\Rightarrow ۲m+n=۹$$

گروه آموزشی ماز

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

دوپینگ ماز
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱۴- از محل تقاطع نمودار منحنی $f(x)=\sqrt{x}+۲$ با وارون آن دو خط مماس یکی بر f و دیگری بر $f^{-۱}$ رسم می‌کنیم. اگر α زاویهٔ حادهٔ بین دو خط مماس باشد، مقدار $\sin(۲\alpha)$، کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۱۵}$ ۲) $\frac{۸}{۱۵}$ ۳) $\frac{۲۲۵}{۲۸۹}$ ۴) $\frac{۲۴۰}{۲۸۹}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۴) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

اگر دو منحنی f و g در نقطه $x=a$ با هم برخورد کنند، در این صورت زاویه بین دو منحنی که همان زاویه بین دو خط مماس رسم شده بر نمودار تابع در نقطه تماس می‌باشد برابر است با:

$$\tan\alpha=\left|\frac{m_۲-m_۱}{۱+m_۱m_۲}\right| \qquad \begin{cases} m_۱=f'(x=a) \\ m_۲=g'(x=a) \end{cases}$$

چون تابع f، تابعی اکیداً صعودی است بنابراین تقاطع f با وارون آن یعنی $f^{-۱}$ بر روی نیمساز ناحیه اول و سوم $(y=x)$ قرار دارد. بنابراین برای پیدا کردن نقطه تلاقی، باید معادله $f(x)=x$ را حل کنیم:

$$\sqrt{x}+۲=x\Rightarrow x=۴\Rightarrow A(۴,۴)$$

حال ضابطه تابع $f^{-۱}$ را پیدا کرده و با استفاده از مشتق، شیب خطوط مماس بر نمودار توابع f و $f^{-۱}$ را در نقطه‌ای به طول $x=۴$ به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\sqrt{x}+۲\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\Rightarrow f'(۴)=\frac{۱}{۲\sqrt{۴}}=\frac{۱}{۴}$$

$$f^{-۱}(x)=(x-۲)^۲\Rightarrow (f^{-۱}(x))'=۲(x-۲)\Rightarrow (f^{-۱})'(۴)=۴$$

حال مطابق نکته درسنامه داریم:

$$\tan\alpha=\left|\frac{m-m'}{۱+mm'}\right|$$

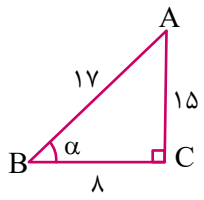
چون $m=\frac{۱}{۴}$ و $m'=۴$ است. پس:

$$\tan\alpha=\left|\frac{\frac{۱}{۴}-۴}{۱+(۴)(\frac{۱}{۴})}\right|=\frac{۱۵}{۸}$$

چون $\tan\alpha=\frac{۱۵}{۸}$ است، پس به کمک مثلث قائم‌الزاویه زیر داریم:

فیثاغورس: $AB^۲=۲۲۵+۶۴=۲۸۹\rightarrow AB=۱۷$

$$\begin{cases} \sin\alpha=\frac{AC}{AB}=\frac{۱۵}{۱۷} \\ \cos\alpha=\frac{BC}{AB}=\frac{۸}{۱۷} \end{cases}$$



$$\sin۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha=۲\times\frac{۱۵}{۱۷}\times\frac{۸}{۱۷}=\frac{۲۴۰}{۲۸۹}$$

گروه آموزشی ماز

۱۵- در نقطه تلاقی منحنی‌های $f(x)=\sin x+\frac{۱}{۲}\cos x$ و $g(x)=\frac{۳}{۲}\sin x$ در بازه $[۰,\pi]$ خط مماسی بر منحنی $f(x)$ رسم می‌شود. این خط، محور xها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $\frac{\pi}{۴}-۱$ ۲) $\frac{\pi}{۴}-۳$ ۳) $\frac{\pi}{۴}+\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{\pi}{۴}+\frac{۳}{۸}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۴) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

نکته:

شیب خط مماس بر منحنی $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ برابر $f'(a)$ است.

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

$$\sin x+\frac{۱}{۲}\cos x=\frac{۳}{۲}\sin x\Rightarrow \sin x=\cos x\Rightarrow x=\frac{\pi}{۴}$$

$$A(\frac{\pi}{۴},\frac{۳\sqrt{۲}}{۴})$$

$$f'(x)=\cos x-\frac{۱}{۲}\sin x\to f'(\frac{\pi}{۴})=\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

خط مماس : $y-\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}(x-\frac{\pi}{۴})$

$$y=۰\to x=\frac{\pi}{۴}-۳$$

گروه آموزشی ماز

۱۶- تابع f مشتق‌پذیر و با دورهٔ تناوب ۵ است. اگر $f'(-۱)=\frac{۳}{۲}$ و $g(x)=f(x+۱)+f(۳x+۱۰)$ باشد، حاصل $g'(-۲)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{۷}{۲}$ ۳) ۶ ۴) $\frac{۱۳}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۴) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

نکته:

اگر تابع $f(x)$ متناوب با دورهٔ T باشد:

$$f(x+T)=f(x)\ ,\ f'(x+T)=f'(x)$$

دورهٔ تناوب تابع f' نیز برابر ۵ است، پس داریم:

$$f'(-۱)=f'(۴)=\frac{۳}{۲}$$

$$g'(x)=f'(x+۱)+۳f'(۳x+۱۰)$$

$$g'(-۲)=f'(-۱)+۳f'(۴)=f'(-۱)+۳f'(-۱)=۴\times\frac{۳}{۲}=۶$$

گروه آموزشی ماز

۱۷- اگر $f(x)=(x-۴)\sqrt[۳]{x+۳}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f^۲(۵-h)-۳f(۵-h)+۲}{h(۵-h)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۳۰}$ ۲) $-\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) $-\frac{۱۳}{۱۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۴) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

نکته:

اگر $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{\text{هوپیتال}}\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$

روش اول:

$$f'(x)=\sqrt[۳]{x+۳}+\frac{x-۴}{۳\sqrt[۳]{(x+۳)^۲}}$$

$$f'(۵)=۲+\frac{۱}{۳\times۴}=\frac{۲۵}{۱۲}$$

$$\text{جواب (هوپیتال)}=\lim_{h\to ۰}\frac{-۲f(۵-h)f'(۵-h)+۳f'(۵-h)}{۵-۲h}=\frac{۱}{۵}(-۲f(۵)f'(۵)+۳f'(۵))=\frac{۱}{۵}\times(-f'(۵))=-\frac{۱}{۵}\times\frac{۲۵}{۱۲}=-\frac{۵}{۱۲}$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

دوپینگ ماز
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

روش دوم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^{2}(5-h)-3f(5-h)+2}{h(5-h)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(5-h)-2}{h}\times\lim_{h\to 0}\frac{f(5-h)-1}{5-h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(5-h)-f(5)}{h}\times\frac{f(5)-1}{5}=-f'(5)\times\frac{2-1}{5}=-\frac{25}{12}\times\frac{1}{5}=-\frac{5}{12}$$

گروه آموزشی ماز

۱۸- در کدام نقطه از منحنی $y=x^{2}-4x+5$، خط مماس بر منحنی، بر $6y-3x=1$ عمود است؟

۱) $(-2,17)$ ۲) $(-1,10)$ ۳) $(1,2)$ ۴) $(2,1)$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۴) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

- شیب خط مماس بر منحنی $f(x)$ در $x=a$، برابر $f'(a)$ است.
- اگر دو خط برهم عمود باشند، شیب‌های قرینه و معکوس دارند.

شیب خط $6y-3x=1$ برابر $\frac{1}{2}$ است. پس شیب خط مماس بر منحنی برابر -2 خواهد بود.

$$f'(a)=-2\Rightarrow 2a-4=-2\Rightarrow a=1$$

$$\Rightarrow \text{نقطه تماس } (1,2)$$

گروه آموزشی ماز

۱۹- در بازه $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$، آهنگ متوسط تغییر تابع $y=\sin x\cos 2x$ چند برابر آهنگ متوسط تغییر تابع $y=\sin^{4}x-\cos^{4}x$ است؟

۱) -1 ۲) 1 ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۴) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ در بازهٔ $[a,b]$: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$\text{آهنگ متوسط اولی}=\frac{-1-0}{\frac{\pi}{4}}=\frac{-4}{\pi}$$

$$\text{آهنگ متوسط دومی}=\frac{1-0}{\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{\pi}$$

$$\frac{-\frac{4}{\pi}}{\frac{4}{\pi}}=-1$$

گروه آموزشی ماز

۲۰- خط d موازی محور xها، قرینه سهمی $y=x^{2}+1$ نسبت به محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند و مماس‌های رسم شده در این نقاط بر هم عمودند. فاصله خط d از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) ۱/۲۵ ۲) ۳/۲۵ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۲/۷۵

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۴) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

نکته ۱:

شیب خط مماس بر نمودار تابع $y=f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ برابر است با: $m=f'(a)$

نکته ۲:

قرینهٔ تابع $y=f(x)$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

دوپینگ ماز
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۱) نسبت به محور xها: $y=-f(x)$

۲) نسبت به محور yها: $y=f(-x)$

۳) نسبت به مبدأ مختصات: $y=-f(-x)$

می‌دانیم خط d که موازی محور xها است، قرینه سهمی $y=x^2+1$ نسبت به محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند:

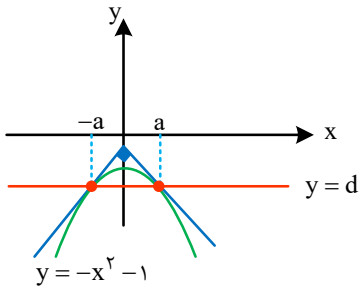
$$y=x^2+1 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور xها}} y_\circ=-x^2-1$$

از طرفی، $y'_\circ=-2x$ و اگر طول نقاط برخورد خط افقی d با منحنی $y_\circ=-x^2-1$ را به صورت $-a$ و a فرض کنیم، داریم:

$$y'=-2x \Rightarrow \begin{cases} y'(a)=-2a \\ y'(-a)=2a \end{cases}$$

می‌دانیم که خطوط مماس بر هم عمودند، پس:

$$(2a)(-2a)=-1 \Rightarrow a^2=\frac{1}{4} \xrightarrow{a>0} a=\frac{1}{2}$$



بنابراین، طول نقاط برخورد به صورت $x=\frac{1}{2}$ و $x=-\frac{1}{2}$ است. حال، اگر یکی از این نقاط را در ضابطه تابع $y_\circ=-x^2-1$ جایگذاری کنیم، عرض نقطه تقاطع به دست می‌آید:

$$y_\circ=-x^2-1 \xrightarrow{x=\frac{1}{2}} y_\circ=-\frac{1}{4}-1=-\frac{5}{4}$$

بنابراین، مختصات نقاط برخورد به صورت $A(-\frac{1}{2},-\frac{5}{4})$ و $B(\frac{1}{2},-\frac{5}{4})$ است و فاصله خط d از مبدأ، همان عرض نقاط برخورد است که برابر است با:

$$\frac{5}{4}=1/25$$

گروه آموزشی ماز

۲۱- اگر $f(x)=\frac{27-\sin^3 x}{9-\sin^2 x}$ و $g(x)=\frac{3}{3+\sin x}$ باشد، حاصل عبارت $3g'(\frac{5\pi}{3})-f'(\frac{5\pi}{3})$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۴) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

مشتق‌گیری

قبل از محاسبهٔ مشتق توابع، تا جایی که می‌توانیم تابع را ساده می‌کنیم و بعد مشتق می‌گیریم.

$$3g'(\frac{5\pi}{3})-f'(\frac{5\pi}{3})=(3g'(x)-f'(x))(\frac{5\pi}{3})=(3g(x)-f(x))'(\frac{5\pi}{3})$$

حال به کمک ضابطهٔ توابع f و g، ضابطهٔ تابع $(3g-f)(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(3g-f)(x)=3g(x)-f(x)=\frac{3\times 3}{3+\sin x}-\frac{27-\sin^3 x}{9-\sin^2 x}$$

می‌دانیم که $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ و $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ است، پس:

$$3g(x)-f(x)=\frac{9}{3+\sin x}-\frac{(3-\sin x)(9+3\sin x+\sin^2 x)}{(3-\sin x)(3+\sin x)}=\frac{9-9-3\sin x-\sin^2 x}{3+\sin x}$$

$$=\frac{-3\sin x-\sin^2 x}{3+\sin x}=\frac{-\sin x(3+\sin x)}{3+\sin x}=-\sin x$$

$$\Rightarrow 3g(x)-f(x)=-\sin x$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds
دوپینگ ماز

حال از طرفین رابطهٔ فوق مشتق گرفته و $x=\frac{5\pi}{3}$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\big(3g(x)-f(x)\big)'=-\cos x \xrightarrow{x=\frac{5\pi}{3}} 3g'(\tfrac{5\pi}{3})-f'(\tfrac{5\pi}{3})=-\cos(\tfrac{5\pi}{3})$$

$$=-\cos(2\pi-\tfrac{\pi}{3})=-\cos(\tfrac{\pi}{3})=-\tfrac{1}{2}$$

گروه آموزشی ماز

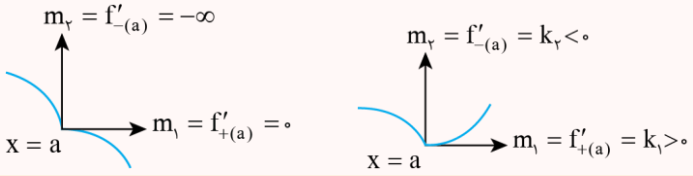
۲۲- به‌ازای چند مقدار صحیح نامنفی m، (a,b) یک نقطهٔ گوشه‌ای برای منحنی $f(x)=\begin{cases} b & x<a \\ b+(x-a)^m & x\geq a \end{cases}$ است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۴) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

نقاط زاویه‌دار (گوشه)

نقطه‌ای که در آن تابع پیوسته بوده، اما مشتق‌های راست و چپ برابر نیستند (یکی از مشتق‌های راست و چپ می‌تواند بی‌نهایت باشد.)



قرار است نقطهٔ (a,b)، نقطهٔ گوشه‌ای باشد پس شرط پیوستگی تابع f در $x=a$، الزامی است:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)\Rightarrow b=b$$

حال برای اینکه تابع f در $x=a$ نقطهٔ گوشه‌ای داشته باشد باید $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ موجود (متناهی) و نابرابر باشند. به عبارت دیگر: $f'_+(a)\neq f'_-(a)$

$$f(x)=\begin{cases} b & x<a \\ b+(x-a)^m & x\geq a \end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} f'_-(x)=0 & x<a \\ f'_+(x)=m(x-a)^{m-1} & x>a \end{cases}$$

می‌دانیم که $m\geq 0$ و $m\in\mathbb{Z}$ است، پس:

$$m=0\Rightarrow\begin{cases} f'_-(a)=0 \\ f'_+(a)=0 \end{cases}\Rightarrow f'_-(a)=f'_+(a)\ \times$$

$$m=1\Rightarrow\begin{cases} f'_-(a)=0 \\ f'_+(a)=1 \end{cases}\Rightarrow f'_-(a)\neq f'_+(a)\ \checkmark$$

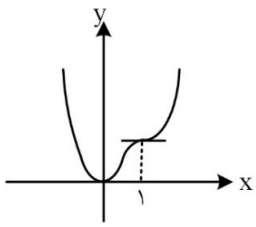
$$m\geq 2\Rightarrow\begin{cases} f'_-(a)=0 \\ f'_+(a)=m(a-a)^{m-1}=0 \end{cases}\Rightarrow f'_-(a)=f'_+(a)\ \times$$

پس فقط به ازای $m=1$، نقطه (a,b)، نقطهٔ گوشه‌ای برای تابع f است، بنابراین گزینهٔ ۱ صحیح است.

گروه آموزشی ماز

سؤالات کنکور: فصل ۵ دوازدهم

۲۳- شکل روبه‌رو، نمودار تابع $f(x)=3x^4+ax^3+bx^2+cx$ است. a کدام است؟



۱) -8
۲) -7
۳) -5
۴) -4

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵) (کنکور داخل ۹۸)

با توجه به نمودار تابع می‌توان به نتایج زیر رسید:

۱) شیب خط مماس بر نمودار تابع در نقاط $x=0$ و $x=1$ برابر صفر است (مماس افقی است)، پس $f'(0)=0$ و $f'(1)=0$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

دوپینگ ماز
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۲) نقطه $x=۱$ نقطه عطف نمودار است (جهت تقعر نمودار عوض شده) پس $f''(۱)=۰$

$$f(x)=۳x^۴+ax^۳+bx^۲+cx \Rightarrow \begin{cases} f'(x)=۱۲x^۳+۳ax^۲+۲bx+c \Rightarrow \begin{cases} f'(۰)=۰ \Rightarrow c=۰ \\ f'(۱)=۰ \Rightarrow ۱۲+۳a+۲b=۰ \Rightarrow ۳a+۲b=-۱۲ \end{cases} \\ f''(x)=۳۶x^۲+۶ax+۲b \Rightarrow f''(۱)=۰ \Rightarrow ۳۶+۶a+۲b=۰ \Rightarrow ۳a+b=-۱۸ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۳a+۲b=-۱۲ \\ ۳a+b=-۱۸ \end{cases} \Rightarrow a=-۸ \ , \ b=۶$$

گروه آموزشی ماز

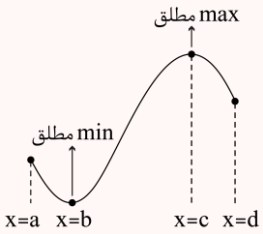
۲۴- فاصلهٔ نقطهٔ مینیمم مطلق تابع $f(x)=\frac{x^۲+۲x}{(x-۱)^۲}$، از خط مجانب قائم آن کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ ترکیبی ـ ۱۲۰۵) (کنکور داخل ۹۸)

نقاط اکسترمم مطلق

برای به دست آوردن نقاط max و min مطلق تابع پیوستهٔ $f(x)$ در بازهٔ $[a,b]$، کافی است نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را در این بازه به دست آوریم و عرض نقاط بحرانی که شامل $x=a$ و $x=b$ نیز می‌شود را محاسبه کرده و با هم مقایسه کنیم هر کدام بیشتر بود max مطلق و هر کدام کمتر بود min مطلق است.



می‌دانیم در توابع کسری ریشه‌های مخرج (در صورتی که ریشه صورت نباشند) مجانب قائم تابع هستند، پس در این تابع $x=۱$ مجانب قائم است. بنابراین باید فاصله نقطه مینیمم مطلق تابع را از خط $x=۱$ پیدا کنیم. برای این کار ابتدا مشتق تابع f را محاسبه کرده و آن را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^۲+۲x}{(x-۱)^۲} \Rightarrow f'(x)=\frac{(۲x+۲)(x-۱)^۲-۲(x-۱)(x^۲+۲x)}{(x-۱)^۴}=\frac{۲(x-۱)((x+۱)(x-۱)-(x^۲+۲x))}{(x-۱)^۴}=\frac{۲(x-۱)(x^۲-۱-x^۲-۲x)}{(x-۱)^۴}$$

$$=\frac{۲(x-۱)(-۲x-۱)}{(x-۱)^۴}=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=-\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

	$-\frac{۱}{۲}$		۱	
y'	−	۰ +	ت ن	−
y	↘	min ↗	ت ن	↘

بنابراین تابع در $x=-\frac{۱}{۲}$، مینیمم دارد که فاصله آن از خط $x=۱$ برابر $\frac{۳}{۲}$ است.

توجه داریم $x=-\frac{۱}{۲}$ نقطهٔ بحرانی می‌باشد و با تعیین علامت مشتق متوجه می‌شویم که این نقطهٔ بحرانی، مینیمم مطلق است.

گروه آموزشی ماز

۲۵- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{|x^۳-۲x|}{x}$، در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۵) (کنکور خارج ۹۸)

می‌دانیم که در توابع به فرم $f(x)=|g(x)|$، ریشه‌های ساده عبارت داخل قدرمطلق، نقاط مشتق‌ناپذیری تابع f می‌باشند، پس ریشه‌های عبارت داخل قدرمطلق را به‌دست می‌آوریم:

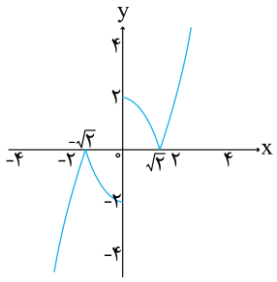
$$x^۳-۲x=۰ \Rightarrow x(x^۲-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x^۲-۲=۰ \Rightarrow x^۲=۲ \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{۲} \\ x=-\sqrt{۲} \end{cases} \end{cases}$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

دوپینگ ماز
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

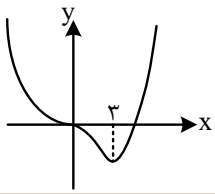
از طرفی $x=0$ ریشهٔ مخرج کسر می‌باشد بنابراین تابع f در $x=0$ نیز مشتق‌ناپذیر است چرا که تابع f در $x=0$ ناپیوسته بوده و قطعاً در این نقطه مشتق‌ناپذیر است در نتیجه تابع f در سطه نقطه با طول‌های $\{\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}\}$ مشتق‌ناپذیر است.

بهتره نمودارش رو هم ببینی...



گروه آموزشی ماز

۲۶- شکل روبه‌رو، نمودار تابع $f(x)=x^4+ax^3+bx^2$ است. $f(-2)$ کدام است؟



۱) ۳۲
۲) ۳۶
۳) ۴۰
۴) ۴۸

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵) (کنکور خارج ۹۸)

با توجه به نمودار:

۱) تابع در نقطه‌ای به طول $x=3$ مینیمم دارد، پس: $f'(3)=0$

۲) تقعر نمودار در مبدأ مختصات تغییر کرده، پس: $f''(0)=0$

۳) همچنین در $x=0$ خط مماس افقی است پس $f'(0)=0$ که البته از این شرط a و b به‌دست نمی‌آیند.

$$f''(0)=0 \Rightarrow 12x^2+6ax+2b=0 \xrightarrow{x=0} 2b=0 \Rightarrow b=0$$

$$f'(3)=0 \Rightarrow 4x^3+3ax^2+2bx=0 \xrightarrow{x=3} 108+27a+6b=0 \xrightarrow{b=0} 108=-27a \Rightarrow a=-4$$

$$f(x)=x^4-4x^3 \xrightarrow{x=-2} f(-2)=(-2)^4-4(-2)^3=16+32=48$$

گروه آموزشی ماز

۲۷- فاصلهٔ نقطهٔ ماکسیمم نسبی تابع $f(x)=\frac{2x-x^2}{(x+1)^2}$، از خط مجانب افقی آن، کدام است؟

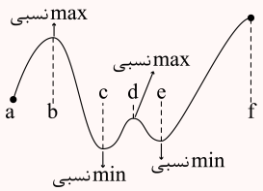
۱) $\frac{2}{3}$
۲) ۱
۳) $\frac{4}{3}$
۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ ترکیبی / مفهومی ـ ۱۲۰۵) (کنکور خارج ۹۸)

اکسترمم نسبی

تابع $f(x)$ در $x=c$ ماکزیمم نسبی دارد، اگر یک همسایگی شامل نقطهٔ c (مانند (a,b)) موجود باشد که برای هر $x\in(a,b)$، $f(c)\geq f(x)$ باشد. همچنین تابع $f(x)$ در $x=c$ مینیمم نسبی دارد، اگر یک همسایگی شامل نقطهٔ c (مانند (a,b)) موجود باشد که برای $x\in(a,b)$، $f(c)\leq f(x)$ باشد.

نقاط ابتدا و انتهای بازه نمی‌توانند اکسترمم نسبی باشند.



برای تعیین نقاط اکسترمم نسبی تابع پیوستهٔ $f(x)$، کافی است از تابع مشتق گرفته و بعد مشتق را تعیین علامت کنیم. اگر علامت مشتق از چپ به راست از مثبت به منفی تغییر کند نقطه max نسبی بوده و اگر علامت مشتق از چپ به راست از منفی به مثبت تغییر کند نقطه min نسبی می‌باشد. اگر علامت مشتق در یک نقطه تغییر نکند، آن نقطه، اکسترمم نسبی نیست.

ابتدا برای پیدا کردن نقاط ماکزیمم تابع، ریشه‌های مشتق را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{2x-x^2}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{(2-2x)(x+1)^2-(2)(x+1)(2x-x^2)}{(x+1)^4} \Rightarrow f'(x)=\frac{2-4x}{(x+1)^3}=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \times \\ x=\frac{1}{2} \checkmark \end{cases}$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

دوپینگ ماز
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

x	-1		$\frac{1}{2}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0 $-$
	↘	ت	↗	max ↘

حال عرض نقطه ماکزیمم نسبی را نیز پیدا می‌کنیم:

$$f(\frac{1}{2})=\frac{1-\frac{1}{4}}{(\frac{1}{2}+1)^2}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{9}{4}}=\frac{1}{3}\Rightarrow \text{مختصات نقطه ماکزیمم نسبی}:(\frac{1}{2},\frac{1}{3})$$

چون $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-1$ ، پس خط $y=-1$ ، مجانب افقی تابع است بنابراین فاصله نقطه $(\frac{1}{2},\frac{1}{3})$ از خط $y=-1$ ، مدنظر می‌باشد که برابر است با: $\frac{4}{3}$

گروه آموزشی ماز

۲۸- بازه‌هایی که تابع $f(x)=\frac{x^4}{x^3-8}$ در آن‌ها اکیداً نزولی است را در نظر بگیرید. مینیمم طول این بازه‌ها، کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt[3]{4}-1$ ۳) $2\sqrt[3]{4}$ ۴) $2(\sqrt[3]{4}-1)$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

برای پیدا کردن بازه‌هایی که تابع f در آن‌ها اکیداً نزولی است، ابتدا مشتق تابع f را بدست آورده و آن را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^4}{x^3-8}$$

$$f'(x)=\frac{(4x^3)(x^3-8)-(3x^2)(x^4)}{(x^3-8)^2}=\frac{x^3((4x^3-32)-(3x^3))}{(x^3-8)^2}=\frac{x^3(x^3-32)}{(x^3-8)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow \frac{x^3(x^3-32)}{(x^3-8)^2}=0\Rightarrow x^3(x^3-32)=0\Rightarrow \begin{cases} x^3=0\to x=0 \\ x^3-32=0\to x^3=32\to x=2\sqrt[3]{4}\end{cases}$$

x		0	2	$2\sqrt[3]{4}$	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
	↗		ت ن	↘	↗

از طرفی $x=2$ نیز ریشه مخرج است. پس:

بنابراین تابع f در بازه‌های $(0,2)$ و $(2,2\sqrt[3]{4})$ اکیداً نزولی است که طول این بازه‌ها به ترتیب برابر ۲ و $2\sqrt[3]{4}-2$ است که مینیمم این طول‌ها $(2\sqrt[3]{4}-2)$ یا همان $2(\sqrt[3]{4}-1)$ است.

گروه آموزشی ماز

۲۹- فرض کنید A و B نقاط اکسترمم تابع $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$ باشند. چند نقطه روی منحنی f وجود دارد که خطوط مماس بر آن‌ها، موازی پاره‌خط AB است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

ابتدا نقاط اکسترمم تابع f را می‌یابیم. برای این کار از تابع f مشتق گرفته و ریشه‌های آن را که همان طول نقاط اکسترمم تابع f هستند، پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=2x^3-3x^2-12x+1\Rightarrow f'(x)=6x^2-6x-12=0\Rightarrow x^2-x-2=0\Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=2\end{cases}$$

با قرار دادن $x=-1$ و $x=2$ در تابع f، عرض نقاط اکسترمم را نیز پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=2x^3-3x^2-12x+1\Rightarrow \begin{cases} x=-1: f(-1)=2(-1)^3-3(-1)^2-12(-1)+1=8\Rightarrow A(-1,8) \\ x=2: f(2)=2(2)^3-3(2)^2-12(2)+1=-19\Rightarrow B(2,-19)\end{cases}$$

می‌دانیم که شیب خط مماس بر نمودار تابع در هر نقطه همان مشتق تابع در نقطه موردنظر است.

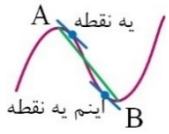
کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

دوپینگ ماز
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

حال اگر بخواهیم نقاطی را بیابیم که خط مماس بر آن‌ها موازی پاره‌خط AB باشد باید شیب خط مماس بر نمودار تابع f در این نقاط (یعنی $f'(x)$) با شیب پاره‌خط AB برابر باشد، به عبارت دیگر باید معادله $f'(x)=m_{AB}$ را حل کنیم:

$$\begin{cases} m_{AB}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{-19-8}{2-(-1)}=\dfrac{-27}{3}=-9 \\ f'(x)=6x^2-6x-12 \end{cases} \Rightarrow 6x^2-6x-12=-9 \Rightarrow 6x^2-6x-3=0 \xrightarrow{\Delta>0}$$ معادله دو ریشه دارد.

توجه: چون تعداد نقاط را می‌خواهیم نیازی به حل معادله فوق نیست.



گروه آموزشی ماز

۳۰- مجموعهٔ مقادیری از اعداد حقیقی که در آن تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}+|x|$ صعودی باشد، کدام است؟

۱) $[-1,\infty)$ ۲) $(-\infty,\infty)$ ۳) $[-1,0)\cup(0,\infty)$ ۴) $[-3\sqrt{3},0]$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

$$y=\sqrt[m]{u^n} \rightarrow y'=\frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$$

برای این که تابع $f(x)$ صعودی باشد، مقدار مشتق تابع باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد $(f'(x)\geq 0)$. از طرفی اگر $x\geq 0$ باشد تابع ما به صورت $f(x)=\sqrt[3]{x}+x$ است که حاصل جمع دو تابع اکیداً صعودی است. پس به ازای $x>0$، تابع f اکیداً صعودی است.

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x}+x & ; x\geq 0 \\ \sqrt[3]{x}-x & ; x<0 \end{cases}$$

مقدار مشتق تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}-x$ را با توجه به دامنهٔ آن، بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-1 \quad ; x<0$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-1\geq 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2}\leq 1 \Rightarrow x^2\leq 1 \Rightarrow \begin{cases} -1\leq x\leq 1 \\ x<0 \end{cases} \xrightarrow{\cap} x\in[-1,0)$$

لذا اجتماع جواب‌های $x\geq 0$ و $-1\leq x<0$، بازه $[-1,+\infty)$ است. دقت شود که تابع f در $x=0$ پیوسته است، لذا $x=0$ نیز جزء جواب‌های ما است

گروه آموزشی ماز

۳۱- تعداد بازه‌هایی که تابع $f(x)=\dfrac{x^4-3}{x^2-2}; x\in(-2,2)$، در آن‌ها اکیداً نزولی باشد، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۳ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

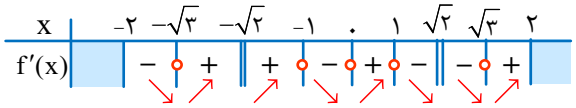
می‌دانیم برای این که تابع f اکیداً نزولی باشد باید $f'(x)\leq 0$ باشد، پس:

$$f(x)=\frac{x^4-3}{x^2-2} \Rightarrow f'(x)=\frac{(4x^3)(x^2-2)-(2x)(x^4-3)}{(x^2-2)^2}\leq 0$$

مخرج تابع مشتق، همواره نامنفی است. بنابراین صورت آن باید کوچک‌تر یا مساوی صفر باشد:

$$(4x^3)(x^2-2)-(2x)(x^4-3)\leq 0 \Rightarrow 2x(x^4-4x^2+3)\leq 0 \Rightarrow x(x^2-1)(x^2-3)\leq 0$$

توجه شود که تابع f با دامنه مفروض $(-2,2)$، در ریشه‌های مخرج یعنی $x=\sqrt{2}$ و $x=-\sqrt{2}$ ناپیوسته است و در این نقاط مشتق تابع تعریف نمی‌شود و تغییرعلامت هم نخواهد داد. پس:



بنابراین تابع f در ۴ بازهٔ $(-2,-\sqrt{3}),[-1,0],[1,\sqrt{2}),(\sqrt{2},\sqrt{3}]$ اکیداً نزولی است.

گروه آموزشی ماز

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

دوپینگ ماز
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

۳۲- فرض کنید A و B نقاط مینیمم نسبی و C و D نقاط عطف تابع $f(x)=x^۴-۶x^۲+۵$ باشند. زاویهٔ بین پاره‌خط‌های AB و CD، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳۰ ۳) ۴۵ ۴) ۶۰

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

ابتدا مشتق تابع را به دست آورده و آن را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x)=x^۴-۶x^۲+۵ \Rightarrow f'(x)=۴x^۳-۱۲x=۴x(x^۲-۳)$$

x		$-\sqrt{۳}$		۰		$\sqrt{۳}$	
$f'(x)$	−	۰	+	۰	−	۰	+
		min				min	

با قرار دادن طول نقاط مینیمم نسبی یعنی $(x=\pm\sqrt{۳})$ در تابع f، مختصات این نقاط را به دست می‌آوریم:

$$A(-\sqrt{۳},-۴)$$

$$B(\sqrt{۳},-۴)$$

حال برای به دست آوردن طول نقاط عطف تابع f، مشتق دوم تابع f را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f''(x)=۱۲x^۲-۱۲=۱۲(x^۲-۱)$$

x		-۱		۱	
$f''(x)$	+	۰	−	۰	+
		عطف		عطف	

اکنون با قرار دادن طول نقاط عطف $(x=\pm۱)$ در تابع f، مختصات نقاط عطف تابع را نیز می‌یابیم:

$$C(-۱,۰)$$

$$D(۱,۰)$$

حال شیب پاره‌خط‌های AB و CD را به دست می‌آوریم:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-۴-(-۴)}{\sqrt{۳}-(-\sqrt{۳})}=۰$$

$$m_{CD}=\frac{y_D-y_C}{x_D-x_C}=\frac{۰-۰}{۱-(-۱)}=۰$$

چون شیب هر دو پاره‌خط برابر صفر به دست آمد. بنابراین دو پاره‌خط با هم موازی‌اند و زاویه بین آن‌ها برابر صفر است.

گروه آموزشی ماز

۳۳- نقطهٔ $A(-۱,۱)$ اکسترمم نسبی تابع $y=x^۲|x|+۳ax^۲+b$ است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

نکته:

اگر نقطهٔ $A(a,b)$ اکسترمم نسبی تابع چند جمله‌ای $f(x)$ باشد:

۱) $f(a)=b$ ۲) $f'(a)=۰$

طول نقطهٔ اکسترمم نسبی منفی است و به ازای $x<۰$، $|x|=-x$، پس داریم:

$$\begin{cases} y=-x^۳+۳ax^۲+b \\ y'=-۳x^۲+۶ax \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(-۱)=۱ \rightarrow ۱+۳a+b=۱ \\ y'(-۱)=۰ \rightarrow -۳-۶a=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{۱}{۲} \\ b=\frac{۳}{۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{a}=-۳$$

دقت کنید که از معادلهٔ اول نیز می‌توانستیم به طور مستقیم، $\frac{b}{a}=-۳$ را به دست آوریم.

گروه آموزشی ماز

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

۳۴- محل تلاقی مجانب‌های تابع هموگرافیک $y=\frac{ax+3}{(a+1)x+(a-1)}$، نقطه مینیمم تابع $y=\frac{3}{2}x^2+x+\frac{5}{6}$ است. نمودار این تابع هموگرافیک، محور xها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۳ ۲) -3 ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

نکته:

۱ـ مجانب‌های افقی تابع $f(x)$، از حد f در بی‌نهایت به‌دست می‌آیند.

۲ـ مجانب‌های قائم ریشه‌های مخرج تابع هستند به شرطی که ریشه صورت نباشند.

۳ـ طول نقطه min سهمی $y=ax^2+bx+c$ به‌صورت $x=\frac{-b}{2a}$ است.

نقطه برخورد مجانب‌ها $A(\frac{1-a}{a+1},\frac{a}{a+1})$

نقطه min سهمی $A(-\frac{1}{3},...)$

$\Rightarrow \frac{1-a}{a+1}=\frac{-1}{3}\Rightarrow a=2\Rightarrow y=\frac{2x+3}{3x+1}\xrightarrow{y=0}2x+3=0\Rightarrow x=-\frac{3}{2}$

گروه آموزشی ماز

۳۵- نقاط $A(0,0)$ و $B(1,1)$ نقاط اکسترمم نسبی تابع $y=ax^3+bx^2+cx+d$ هستند، حاصل ab کدام است؟

۱) -3 ۲) -6 ۳) ۳ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

اگر نقطه $A(a,b)$ اکسترمم نسبی تابع چندجمله‌ای $f(x)$ باشد:

$$\begin{cases} f(a)=b \\ f'(a)=0 \end{cases}$$

$\begin{cases} f(0)=0 \Rightarrow d=0 \\ f(1)=1 \Rightarrow a+b+c=1 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} f'(0)=0 \Rightarrow c=0 \\ f'(1)=0 \Rightarrow 3a+2b=0 \end{cases}$

$\xrightarrow{d=0,\ c=0} a+b=1,\ 3a+2b=0 \Rightarrow a=-2,\ b=3$

$ab=-6$

گروه آموزشی ماز

۳۶- به ازای چند مقدار صحیح و منفی k، نقطه عطف منحنی $y=kx^3+(k+1)x^2$ در ناحیه دوم محورهای مختصات قرار دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بیش از ۲ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

نکته:

تعریف نقطهٔ عطف: فرض کنیم تابع f در نقطهٔ $x=c$ پیوسته است. در این صورت، نقطهٔ $(c,f(c))$ نقطهٔ عطف تابع f است، هرگاه ۲ شرط زیر را داشته باشد:

۱) نمودار f در نقطهٔ $(c,f(c))$ خط مماس داشته باشد.

۲) جهت تقعر f در نقطهٔ $(c,f(c))$ تغییر کند.

تبصره: معمولاً در سوالات کنکور با دو بار مشتق گرفتن از تابع و برابر صفر قرار دادن آن، نقاط عطف پیدا می‌شوند.

$f''(x)=0$ (x طول نقطهٔ عطف)

می‌دانیم که نقطه عطف تابع $y=kx^3+(k+1)x^2$ باید در ناحیه دوم باشد، یعنی:

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds
دوپینگ ماز

اولاً: طول نقطه عطف باید منفی باشد:

$$y' = ۳kx^۲ + ۲(k+۱)x \Rightarrow y'' = ۶kx + ۲(k+۱) = ۰$$

$$۶kx + ۲k + ۲ = ۰ \Rightarrow x = \frac{-k-۱}{۳k} < ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{cases} k > ۰ \\ \text{یا} \\ k < -۱ \end{cases} \quad (A)$$

ثانیاً: عرض نقطه عطف باید مثبت باشد، یعنی: $f(\frac{-k-۱}{۳k}) > ۰$

$$k(\frac{-k-۱}{۳k})^۳ + (k+۱)(\frac{-k-۱}{۳k})^۲ > ۰ \Rightarrow \frac{-(k+۱)^۳}{۲۷k^۲} + \frac{(k+۱)^۳}{۹k^۲} > ۰$$

$$\frac{-(k+۱)^۳ + ۳(k+۱)^۳}{۲۷k^۲} > ۰ \Rightarrow \frac{۲(k+۱)^۳}{\underbrace{۲۷k^۲}_{+}} > ۰$$

$$\Rightarrow ۲(k+۱)^۳ > ۰ \Rightarrow (k+۱)^۳ > ۰ \Rightarrow k+۱ > ۰ \Rightarrow k > -۱ \quad (B)$$

حال، بین مجموعه‌های (A) و (B) اشتراک می‌گیریم:

$$\xrightarrow{A \cap B} k > ۰$$

بنابراین، هیچ مقدار صحیح و منفی برای k وجود ندارد.

گروه آموزشی ماز

۳۷- کمترین فاصله نقاط واقع بر منحنی $y = \sqrt{x - [x^۲]}$ از خط $۲x - y + ۲ = ۰$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۵}}{۸}$ ۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۱۰}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۵}}{۱۰}$

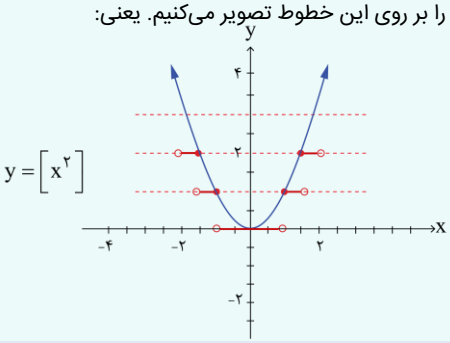
پاسخ: گزینهٔ ۲ (دشوار ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

نکته:

برای رسم نمودار تابع $y = [f(x)]$، نمودار $f(x)$ و خطوط $y = k$ که $k \in \mathbb{Z}$ را رسم کرده و نمودار تابع $f(x)$ را بر روی این خطوط تصویر می‌کنیم. یعنی:

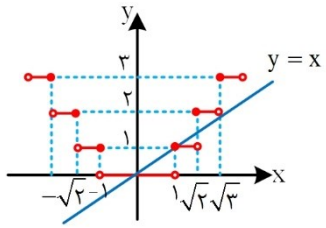
$f(x) \rightarrow$ آبی

$[f(x)] \rightarrow$ قرمز



تبصره: نقاط برخورد $y = k$ و $y = f(x)$ را بدون تغییر دست نخورده باقی می‌گذاریم.

ابتدا نمودار $y = [x^۲]$ و $y = x$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



دامنهٔ تابع را به دست می‌آوریم:

$$y = \sqrt{x - [x^۲]} \Rightarrow x - [x^۲] \geq ۰ \Rightarrow x \geq [x^۲]$$

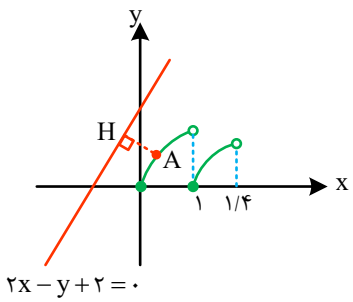
با توجه به نمودار فوق مشخص است که در فاصله $[۰, \sqrt{۲})$ نمودار تابع $y = x$، بالاتر از نمودار تابع $y = [x^۲]$ قرار دارد و یا برابر آن است، پس:

$$\begin{cases} ۰ \leq x < ۱ \rightarrow ۰ \leq x^۲ < ۱ \rightarrow [x^۲] = ۰ \rightarrow y = \sqrt{x} \\ ۱ \leq x < \sqrt{۲} \rightarrow ۱ \leq x^۲ < ۲ \rightarrow [x^۲] = ۱ \rightarrow y = \sqrt{x-۱} \end{cases}$$

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

دوپینگ ماز
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

حال، اگر نمودار تابع $y=\sqrt{x-[x^2]}$ و $2x-y+2=0$ را در یک دستگاه رسم کنیم، داریم:



همانطور که می‌بینید کم‌ترین فاصله نقاط نمودار تابع $y=\sqrt{x-[x^2]}$، از خط $2x-y+2=0$، مربوط به ضابطه $y=\sqrt{x}\;;\;0\le x<1$ است. حال، اگر نقطه مورد نظر را به صورت $A(x,\sqrt{x})$ در نظر بگیریم، داریم:

$$AH=\frac{|2x-\sqrt{x}+2|}{\sqrt{4+1}}=\frac{|2x-\sqrt{x}+2|}{\sqrt{5}}$$

اگر بخواهیم این فاصله کمترین باشد، باید:

$$(AH)'=\frac{1}{\sqrt{5}}(2-\frac{1}{2\sqrt{x}})=0\Rightarrow 2-\frac{1}{2\sqrt{x}}=0\Rightarrow\frac{1}{2\sqrt{x}}=2$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{x}=1\Rightarrow\sqrt{x}=\frac{1}{4}\Rightarrow x=\frac{1}{16}$$

بنابراین، کمترین مقدار AH، به ازای $x=\frac{1}{16}$ اتفاق می‌افتد:

$$AH=\frac{|2x-\sqrt{x}+2|}{\sqrt{5}}\xrightarrow{x=\frac{1}{16}}(AH)_{min}=\frac{|\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+2|}{\sqrt{5}}\Rightarrow(AH)_{min}=\frac{3\sqrt{5}}{8}$$

گروه آموزشی ماز

۳۸- تابع f با ضابطه $f(x)=\sqrt{x|x|-x}$ را درنظر بگیرید. اگر m و n به‌ترتیب تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و k تعداد نقاط بحرانی تابع f باشند، مقدار $\frac{km+n}{k-n}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

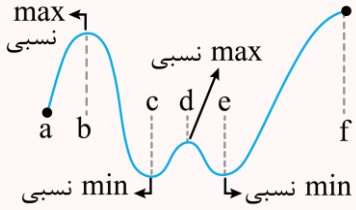
نقاط بحرانی

نقطهٔ $x=c$ را بحرانی می‌گوییم هرگاه این نقطه عضو دامنهٔ تابع باشد و مشتق تابع در این نقطه یا صفر باشد و یا وجود نداشته باشد.

$c\in D_f\Rightarrow f'(c)=0$ یا $f'(c)$ وجود نداشته باشد

با تعریف فوق، تمام نقاطی که در دامنهٔ تابع هستند و تابع در آن نقاط ناپیوسته و یا مشتق‌ناپذیر (نقاط مشتق‌ناپذیر مانند زاویه‌دار، بازگشتی، عطف قائم) باشد، بحرانی هستند. همچنین نقاطی که در آن‌ها، خط مماس، افقی باشد نیز بحرانی هستند. همچنین اگر نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را در بازه $[a,b]$ بخواهند نقاط ابتدا و انتهای بازه، یعنی $x=a$ و $x=b$ بحرانی هستند.

اکسترمم نسبی: تابع $f(x)$ در $x=c$ ماکزیمم نسبی دارد، اگر یک همسایگی شامل نقطهٔ c (مانند (a,b)) موجود باشد که برای هر $x\in(a,b)$، $f(c)\ge f(x)$ باشد.
همچنین تابع $f(x)$ در $x=c$ مینیمم نسبی دارد، اگر یک همسایگی شامل نقطهٔ c (مانند (a,b)) موجود باشد که برای $x\in(a,b)$، $f(c)\le f(x)$ باشد.
نقاط ابتدا و انتهای بازه نمی‌توانند اکسترمم نسبی باشند.



برای تعیین نقاط اکسترمم نسبی تابع مشتق‌پذیر $f(x)$، کافی است از تابع مشتق گرفته و بعد مشتق را تعیین علامت کنیم. اگر علامت مشتق از چپ به راست از مثبت به منفی تغییر کند، نقطهٔ max نسبی بوده و اگر علامت مشتق از چپ به راست از منفی به مثبت تغییر کند، نقطهٔ min نسبی می‌باشد.

کنکور ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

روش اول:

ابتدا دامنهٔ تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$x|x|-x\geq 0 \Rightarrow x(|x|-1)\geq 0$$

$$\xrightarrow[x=\pm 1]{x=0} D_f=[-1,0]\cup[1,+\infty) \Rightarrow \text{(بحرانی هستن } x=0 \text{ و } x=1, x=-1 \text{ فعلاً)}$$

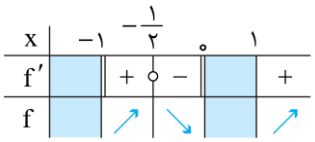
بنابراین با توجه به دامنهٔ تابع f می‌توانیم ضابطهٔ آن را به‌صورت زیر تشکیل دهیم:

$$f(x)=\sqrt{x|x|-x}=\begin{cases}\sqrt{-x^2-x} & -1\leq x\leq 0\\ \sqrt{x^2-x} & x\geq 1\end{cases}$$

حال از تابع f مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-2x-1}{2\sqrt{-x^2-x}} & -1<x<0\\ \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} & x>1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-2x-1=0\Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}\\ 2x-1=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}\xrightarrow{x>1}\text{غ ق ق}\end{cases}$$

بنابراین نقاط بحرانی تابع عبارتند از: $\left\{-1,0,1,-\frac{1}{2}\right\}$ در نتیجه $k=4$ است.



حال سعی می‌کنیم که جدول تغییرات تابع را رسم کنیم:

طبق جدول مقابل، $x=-\frac{1}{2}$، طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است

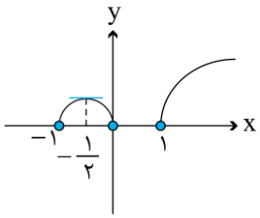
و این تابع، مینیمم نسبی ندارد، بنابراین $m=1$ و $n=0$ است، پس:

$$\begin{cases}k=4\\ m=1\\ n=0\end{cases}\Rightarrow \frac{km+n}{k-n}=\frac{4+0}{4-0}=\frac{4}{4}=1$$

روش دوم:

رسم نمودار تابع f

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x^2-x} & -1\leq x\leq 0\\ \sqrt{x^2-x} & x\geq 1\end{cases}$$



نقاط بحرانی: ۴ عدد $\left(x=-1,1,0,-\frac{1}{2}\right)$

نقطهٔ ماکزیمم نسبی: ۱ عدد

نقطهٔ مینیمم نسبی: ندارد